Практическая работа этапа "Треугольник Серпинского"

Выполнила: *учащаяся 10 класса*
МБОУ города Владимира "СОШ № 7
имени гвардии капитана В.А. Фёдорова"
Лапина Е. А.
Научный руководитель: *учитель математики*
Грачёва В. В.

2021

Лапина Екатерина Алексеевна

Практическая работа

- *Построить, с использованием электронной таблицы MS Excel, в составе офисного пакета MS Office (или любой другой аналог) для проведения вычислений, фрактал, получаемый на основе исследования делимости на 5 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля;*
- *описать используемую технологию построения;*
- *описать обнаруженные закономерности.*

Объект исследование: арифметический треугольник Паскаля.

Исследование: делимость на 5 первых 450 строк элементов треугольника Паскаля (фрактальная геометрия).

Методы исследования в работе: анализ, синтез, поиск, моделирование, построение.

Продукт исследования: фрактал (построить в MS Excel несколькими способами, выясняя причины возникающих трудностей)

Аналитический метод исследования:

1. Изучить, для обоснования математического подхода, используемого при построении, **признак делимости на «5»**.

Признак делимости — алгоритм, позволяющий сравнительно быстро определить, является ли число кратным заранее заданному. Если признак делимости позволяет выяснить не только делимость числа на заранее заданное, но и остаток от деления, то его называют признаком равноостаточности.

Признак делимости на «5»: «***Число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 0 или на 5***»

Соответствующая признаку функция:

A=10, $a_1 + a_0$, 0 $0 \leq a_0 < 10, a_1 \geq 0,$

$$F(\mathrm{A}) = \begin{cases} a_0, \mathrm{A} \geq 10 \\ \mathrm{A} - 5, 5 \leq \mathrm{A} < 10 \end{cases}$$

Эта функция помимо признака делимости задаёт и признак равноостаточности.

Для доказательства признака делимости на 5:

По свойству делимости: «если целое число a делится на целое число b, то произведение m·a, где m – любое целое число, делится на b»; соответственно тогда, число 10 делится на 5, так как 10=5·2, тогда произведение $a_1 \cdot 10$ тоже делится на 5.

По правилу умножения: любое целое число a, запись которого оканчивается нулем, представить в виде a= $a_1 \cdot 10$, где число a_1 получается из числа a, если в его записи справа убрать цифру 0. Если же в записи числа a справа находится произвольная цифра a_0 (0, 1…9), то a можно представить в виде a=$a_1 \cdot 10+a_0$.

По свойству делимости: если в равенстве a=s+t все члены, кроме какого-то одного, делятся на некоторое целое число b, то и этот один член делится на b.

В равенстве a=$a_1 \cdot 10+a_0$ произведение $a_1 \cdot 10$ делится на 5 (доказано ранее). Если a_0 делится на 5 (что возможно, если a_0=0 или a_0=5), то по указанному свойству делимости на 5 делится и число a. Следовательно, доказана достаточность признака делимости на 5. С другой стороны, если a делится на 5, то по указанному свойству делимости и a_0 делится на 5 – доказана необходимость признака делимости на 5.

2. Дополнительно рассмотреть задачи В. Серпинского, в которых используется принцип делимости на 5, согласно которому «число делится на пять в том случае, если запись этого числа справа содержит ноль или пять. Если запись целого числа справа содержит любую другую цифру, то число на пять без остатка не делится» (для решения или для доказательства) (*В. Серпинский. 250 задач по элементарной теории чисел. М., Просвещение, 1968 г. 168 с.*):

3.

В разделе «Делимости чисел»

Задача № 4 Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых число $4n^2+1$ делится одновременно на 5 и на 13

Задача № 31 Доказать, что в бесконечной последовательности 2"- 3 (n = 2, 3,4, . . .) существует бесконечно много членов, делящихся на 5, и бесконечно много делящихся на 13, но ни один член этой последовательности не делится на 5-13

В разделе «Простые и составные числа»

Задача № 86 Найти все целые числа k>0, для которых последовательность k+l, k + 2, . . . ft+100 содержит наибольшее число простых чисел)

Задача № 89 Найти все отрезки натурального ряда, состоящие из 21 числа и содержащие по 8 простых чисел

Задача № 90 Найти все числа р, для которых каждое из шести чисел р, р + 2, р + 6, р + 8, р+12 и р+14 является простым.

Задача № 111 Доказать, что для всех натуральных n>1 число 1/5 $(2^{4n+2} + 1)$ является составным.

В разделе «Разные задачи»

Задача № 207 Доказать, что сумма цифр числа 2^n (записанного в десятичной системе счисления) неограниченно возрастает вместе с п. (Эта задача была помещена в журнале «Matematyka», 1962, № 3 (73), стр. 187, задача 690.)

Задача № 208 Доказать, что если k — любое заданное натуральное число, больше единицы, с — любая цифра десятичной системы счисления, то существует натуральное число n, такое, что k-я от конца цифра в десятичном разложении числа 2^n есть с.

Задача № 211 Доказать, что последние цифры (в десятичной системе счисления) чисел n^{n^n} (n= 1, 2, 3, . . .) составляют периодическую последовательность, найти период и исследовать, является ли он чистым.

В результате математического исследования можно сделать вывод о том, что при построении фрактала, получаемого на основе исследования делимости на 5 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля, необходимо опираться на признак делимости. Следовательно, достаточно вести работу не с массивом больших чисел, а рассматривать остатки от деления чисел треугольника Паскаля (при этом учитывать, что в треугольнике Паскаля коэффициенты получены согласно правилам арифметического треугольника Паскаля) на 5, таким образом использовать функцию в MS Excel, которая бы вычисляла и возвращала остаток от деления.

Алгоритм исследования на фрактальность треугольника Паскаля:

В ходе выполнения практической работы было рассмотрено ***3 алгоритмы построения*** фрактала в программе MS Excel (*конечный продукт получен способом №3*)

1 способ

1) Расставляем единицы, суммируем ячейки, согласно правилам арифметического треугольника Паскаля. Распространяем функцию на первые 450 строк – треугольник Паскаля готов.
2) С помощью функции возвращаем все последние цифры каждого из чисел (правый символов от конца текста). Распространяем функцию на все нужные ячейки.
3) Прописываем функцию учёта всех случаев деления чисел (последних) на 5, согласно признаку делимости на «5»: если остаток 0 или 5, то выбираем элемент (например, «@» или «*»), если нет – то «пробел» - оставляем пустым ячейку. Распространяем функцию на все нужные ячейки.
4) Создаём (для всех выбранных строк) правило форматирования ячеек в определённые цвета.

При изображении фрактала данным способом, может возникнуть проблема: при возврате в ячейках последней цифры, MS Excel для этого производит перевод в текстовую форму и при этом может некорректно рассматривать числа (указывая на ошибки).

2 способ

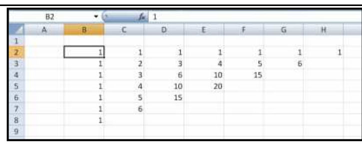
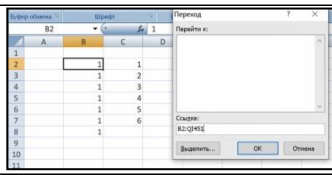
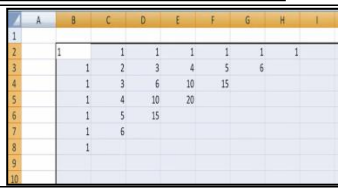
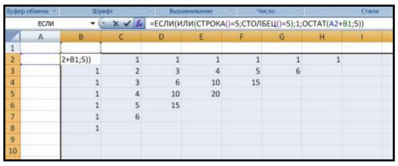
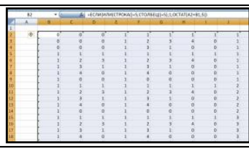
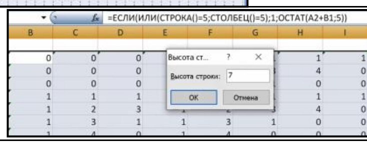
1) Расставляем единицы, суммируем ячейки, согласно правилам арифметического треугольника Паскаля. Распространяем функцию на первые 450 строк – треугольник Паскаля готов.

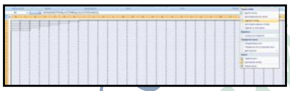
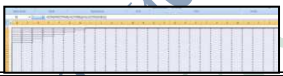
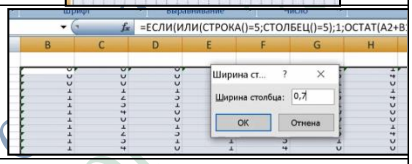
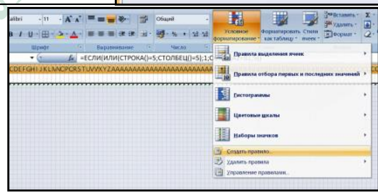
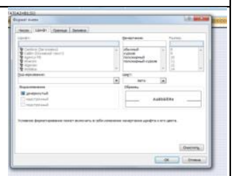
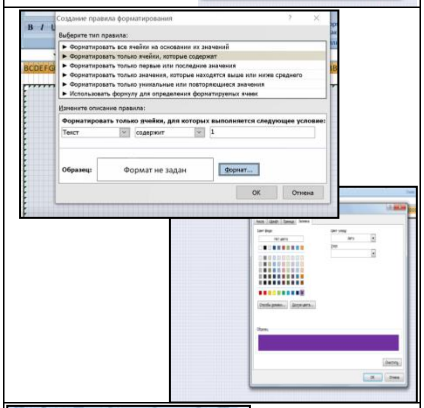
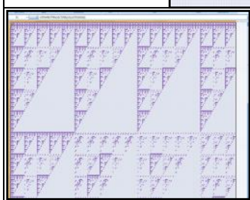
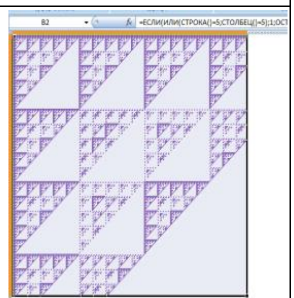
2) Прописываем функцию учёта всех остатков для каждой ячейки при делении на 5: если остаток 0 или 5, то выбираем элемент (например, «@» или «*»), если нет – то «пробел» - оставляем пустым ячейку. Распространяем функцию на все нужные ячейки.

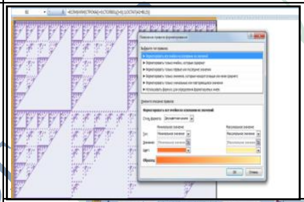
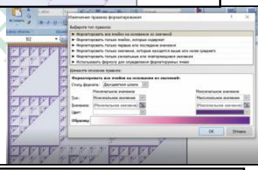
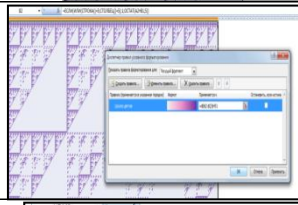
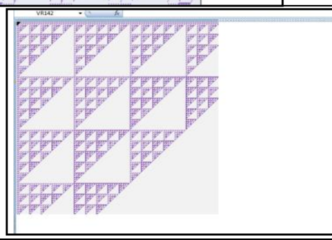
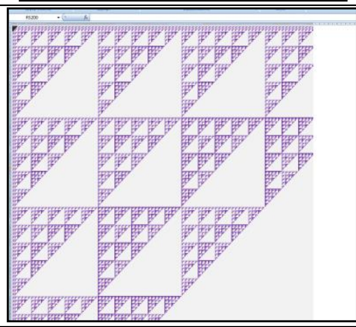
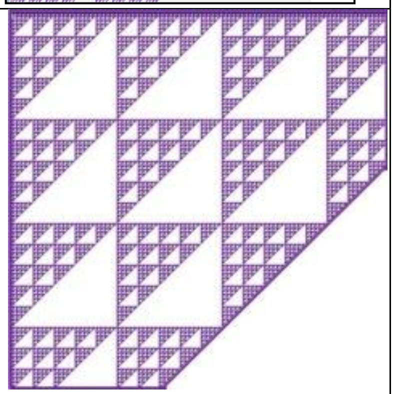
3) Создаём (для всех выбранных строк) правило форматирования ячеек в определённые цвета.

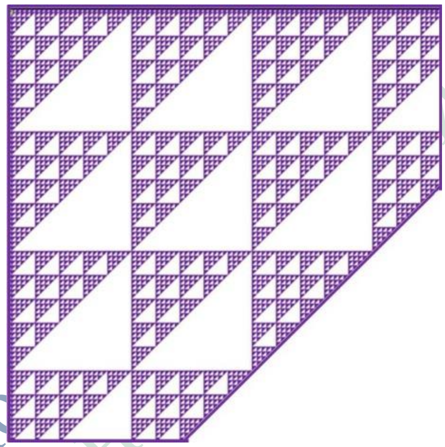
При изображении фрактала данным способом, может возникнуть проблема: при работе в MS Excel с большими числами могут возникать ошибки программы в подсчётах.

3 способ *(Приложение 1(Презентация. Видео))*

№ действия	Действие (шаг алгоритма построения)	Изображение
1	Расставляем с ячейки В2 часть биномиальных коэффициентов, выписав их по диагонали, в первой заполненной строке и первом заполненном столбце единицы, а в остальных сумма верхнего и левого элемента (треугольник 7*7)	
2	Выделяем, начиная с первой заполненной ячейки (В2) необходимую область, в которой будет размещаться арифметический треугольник Паскаля (его первые 450 строк), до QI451	 
3	Прописываем, с учётом принципа делимости на 5, функцию, вычисляющую по всем строкам и столбцам (горизонтальный и вертикальный массивам) и возвращающую номера столбцов и строк, определяемых ссылкой выделенной области, (если выполнено условие, то присваивается значение –«1»), а также функцию, позволяющая вывести в указанную ячейку остаток от деления (возвращающую остаток от деления): **=ЕСЛИ(ИЛИ(СТРОКА()=5;СТОЛБЕЦ()=5);1;ОСТАТ(А2+В1;5))**	
4	Заполняем формулой всю выделенную область.	
5	Устанавливаем размерность ячеек (квадрат), иначе полученный фрактал может быть искажён. В случае неустановленных чётких рамок для ячеек фрактал выглядит следующим образом (являясь нечётко выраженным):  Формат → Высота строки … Формат → Ширина столбца…	 

	Высота строк установлена – 7 Ширина – 0.7	   
6	Для присвоенного значения «1» устанавливаем **Условное форматирование**, выбрав тип форматирования: «**Для всех ячеек на основании их значения»**, указывая цветовую схему Значение ячейки, которая содержит «1» - ***выбран один цвет***. Представлены в разных масштабах (40% и 10%)	     

7	Создаем новое правило форматирования. В***ыбираем стиль формата - «Двухцветная шкала»*** (для чёткости орнамента). Устанавливаем **Условное форматирование**, выбрав тип правила: «Форматировать все ячейки на основании их значений». Стиль формата: «Двухцветная шкала» (для контрастного изображения) и выбираем **2 цвета** (например, белый и фиолетовый).	   
		 



В результате построения - фрактал, получаемый на основе исследования делимости на 5 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля:

Выявленные закономерности построенного фрактала (числовая и геометрическая):

- выявление фрактальных структур зависит от аналитических вычислений;

- фрактал, построенный на основе арифметического треугольника Паскаля при исследовании делимости на 5, можно считать:

1) *числовым* (фрактал арифметического треугольника имеют пределы самоподобной делимости);

2) *геометрическим* (самоподобно дробиться до бесконечно малых элементов);

- при исследовании элементов арифметического треугольника Паскаля на конкретный делитель (на 5) получено самоподобие треугольника Паскаля, т. е. получен числовой фрактал, получаемый заменой элементов арифметического треугольника остатками от их деления на 5, является аналогом геометрического фрактала - видоизменённого треугольника Серпинского. Тем самым, подтверждается одно из свойств арифметического треугольника Паскаля: «Если все нечётные числа в треугольнике Паскаля закрасить в чёрный цвет, а чётные – в белый цвет, то треугольник разобьётся на более мелкие треугольники (образуя треугольник Серпинского)»;

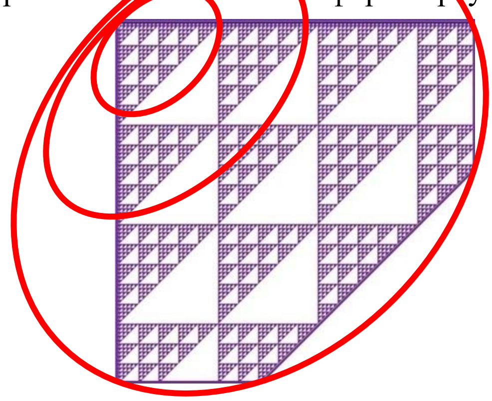
- в результате построения геометрической интерпретации числового фрактала была получена геометрическая фигура, обладающая свойствами самоподобия, т. е. проверяется свойство арифметического треугольника Паскаля: «Простые делители чисел треугольника образуют симметричные самоподобные структуры»;

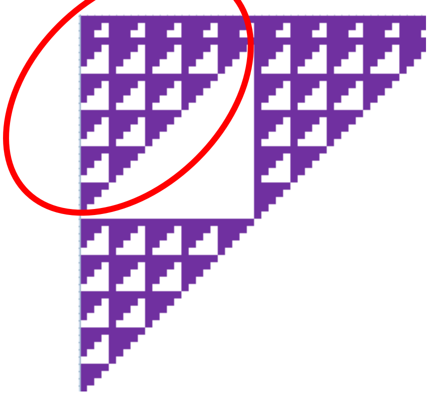
- получившаяся геометрическая фигура представляет собой фрактал - равносторонний треугольник, из фиксированного набора с общей формой и разделенный на меньшие равносторонние треугольники;

- согласно, признаку делимости на 5: «на 5 делятся все натуральные числа, оканчивающиеся на «0» или «5», чётко выдержана фрактальная размерность, просматривается определённая закономерность чисел;

- каждый треугольник фрактала состоит из своих копий, уменьшенных в 5 раз (это части треугольника, содержащиеся в маленьких треугольниках, примыкающих к углам);

- полученный фрактал представляет собой математически сгенерированный узор, воспроизводимый при любом увеличении или уменьшении. На изображение ниже это чётко просматривается (количество и форма треугольников «больших» и их уменьшенная «копия»):



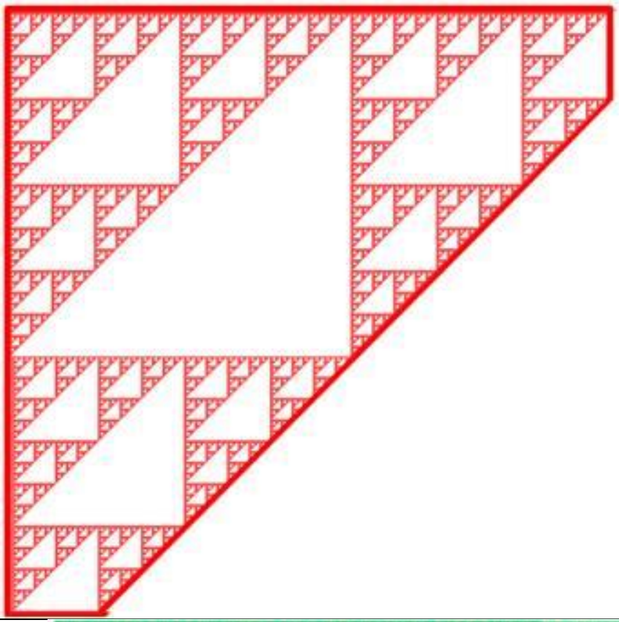
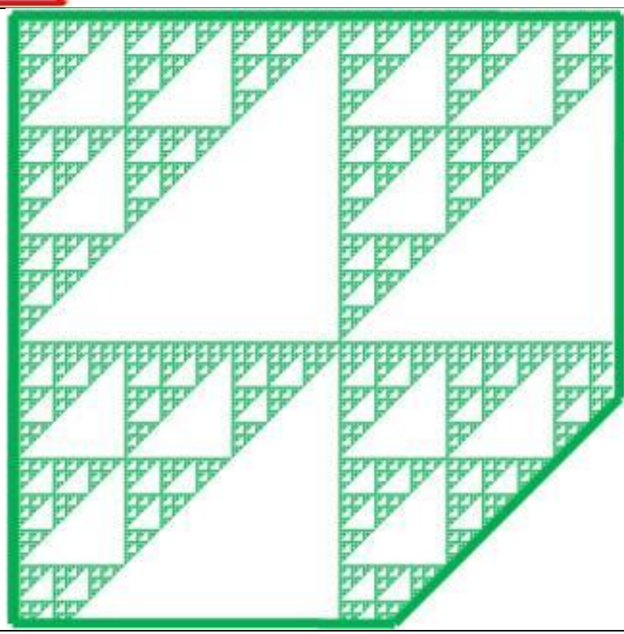


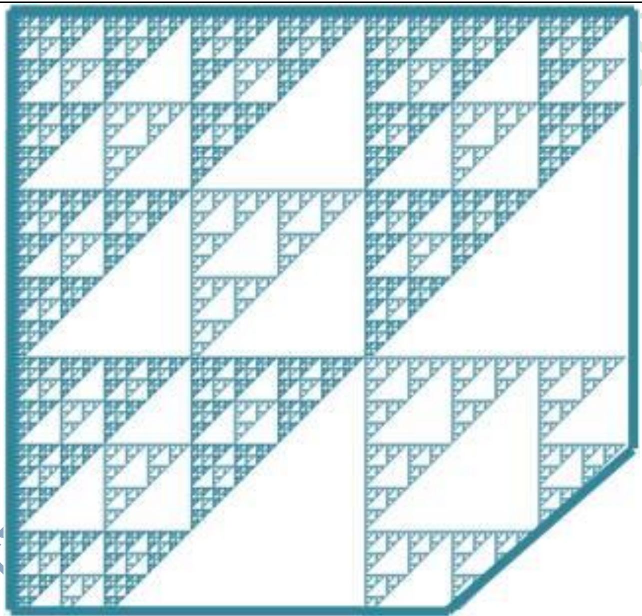
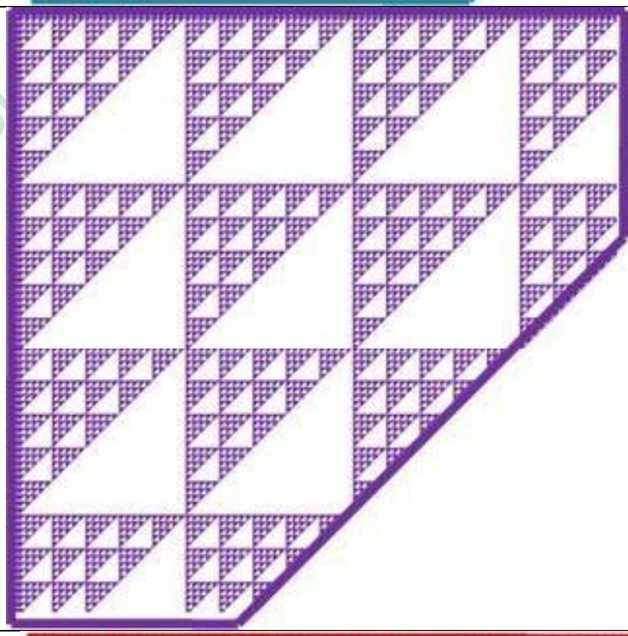
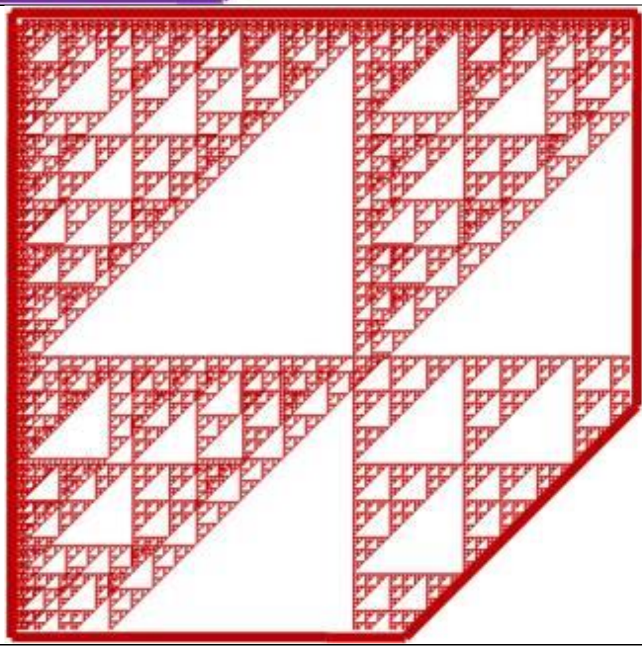
- с увеличением строк (треугольник

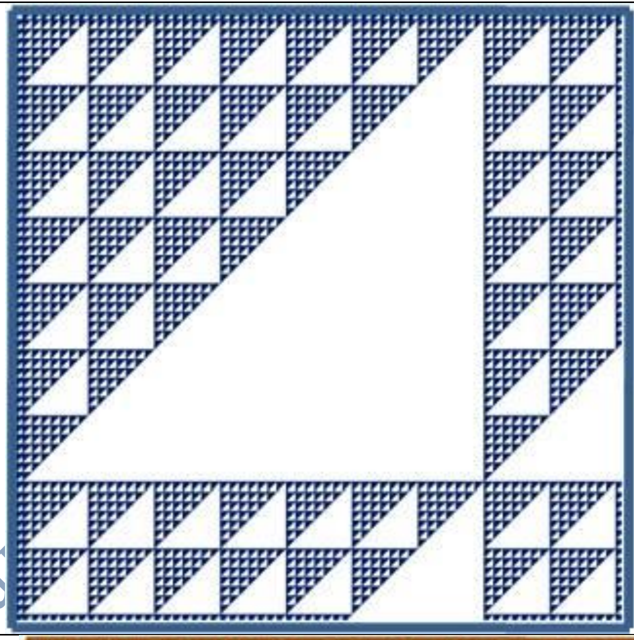
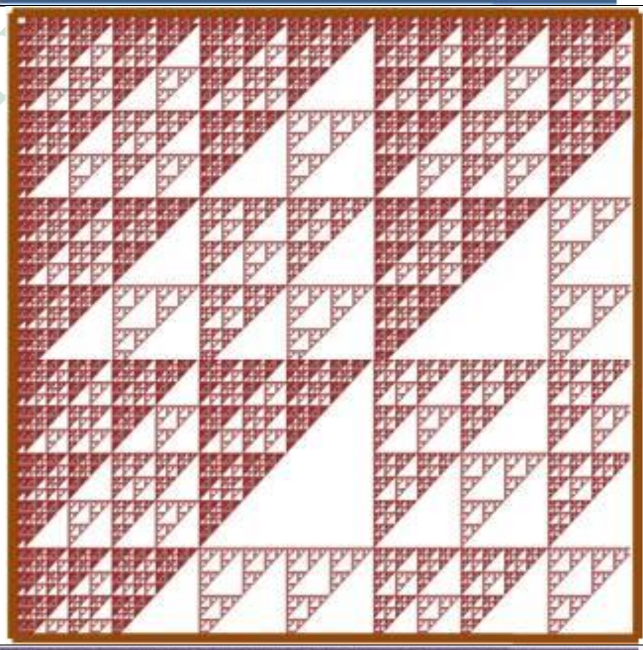
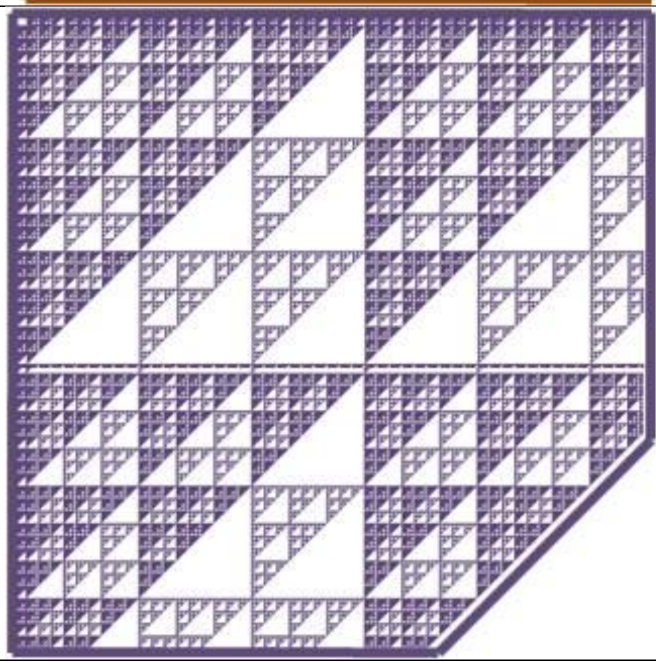
бесконечен), увеличивается и количество треугольников, из которых состоят «полосы», но узор числовой схемы остаётся структурирован;

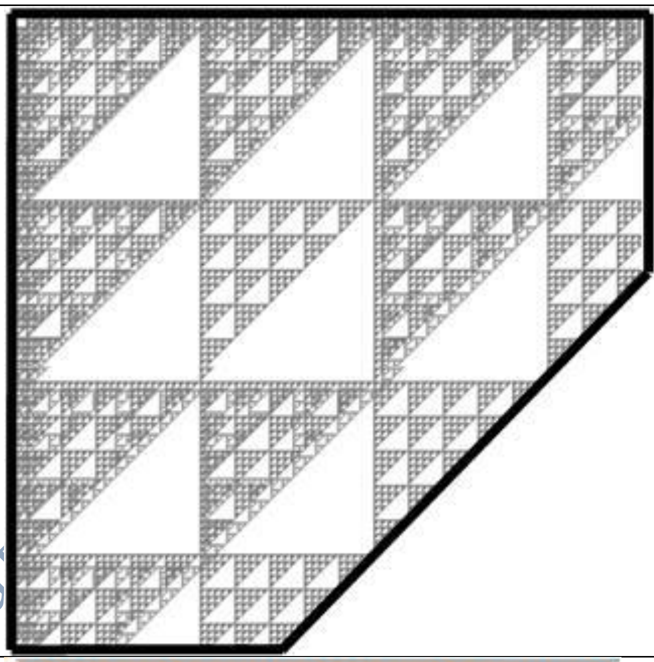
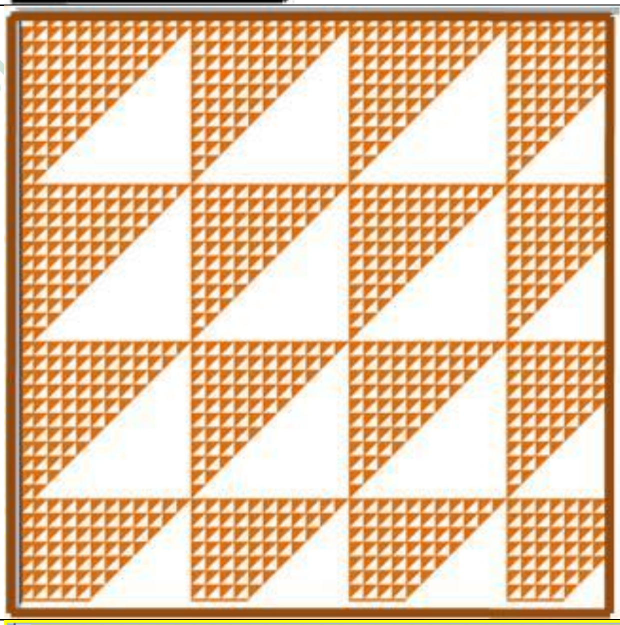
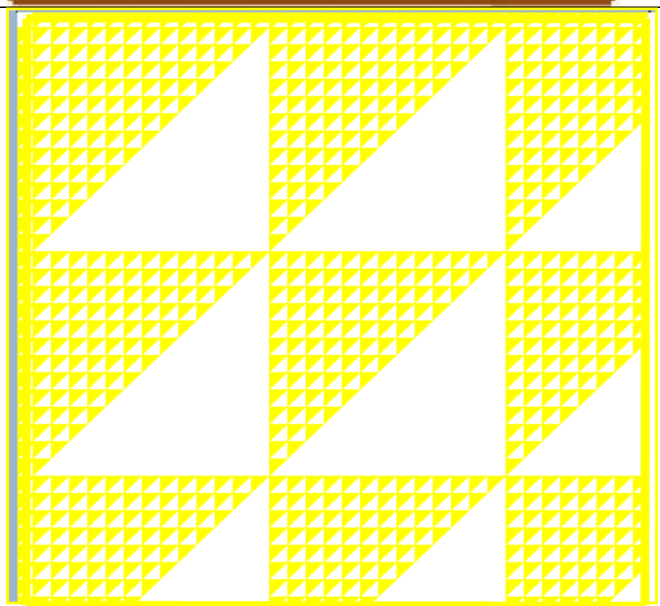
- треугольники состоят из одинаковых частей, коэффициент подобия 1/5;
- треугольники замкнуты;
- получен фрактал с использованием системы повторяющихся функций;
- треугольники очерчены фрактальным деревом с тремя ветвями, образующими угол 60 ° между собой;
- полученный фрактал симметричен.

Дополнительно, для сравнения полученных фрактальных узоров, были исследованы делимости на 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 13 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля и построены соответствующие фракталы. ***(Приложение 2. Презентация)***

Исследования делимости первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля	**Полученное изображение фрактала**
на 2	
на 3	

на 4	
на 5	
на 6	

на 7	
на 8	
на 9	

на 10	
на 11	
на 13	

Получаемые «узоры» изображений являются «лишь конечными приближениями бесконечных по своей сути фракталов». Рассмотрев данные изображения, можно обнаружить в них и самые известные геометрические фракталы: фрактальную кривую (которая, на любых, даже самых маленьких масштабах не сводится к прямой и является в общем случае геометрически нерегулярной, хаотичной) Кривая Коха (Снежинка Коха), Т-квадрат (фрактал), Н-фрактал, Треугольник Серпинского, ковер Серпинского, Дерево Пифагора, Кривая Леви.

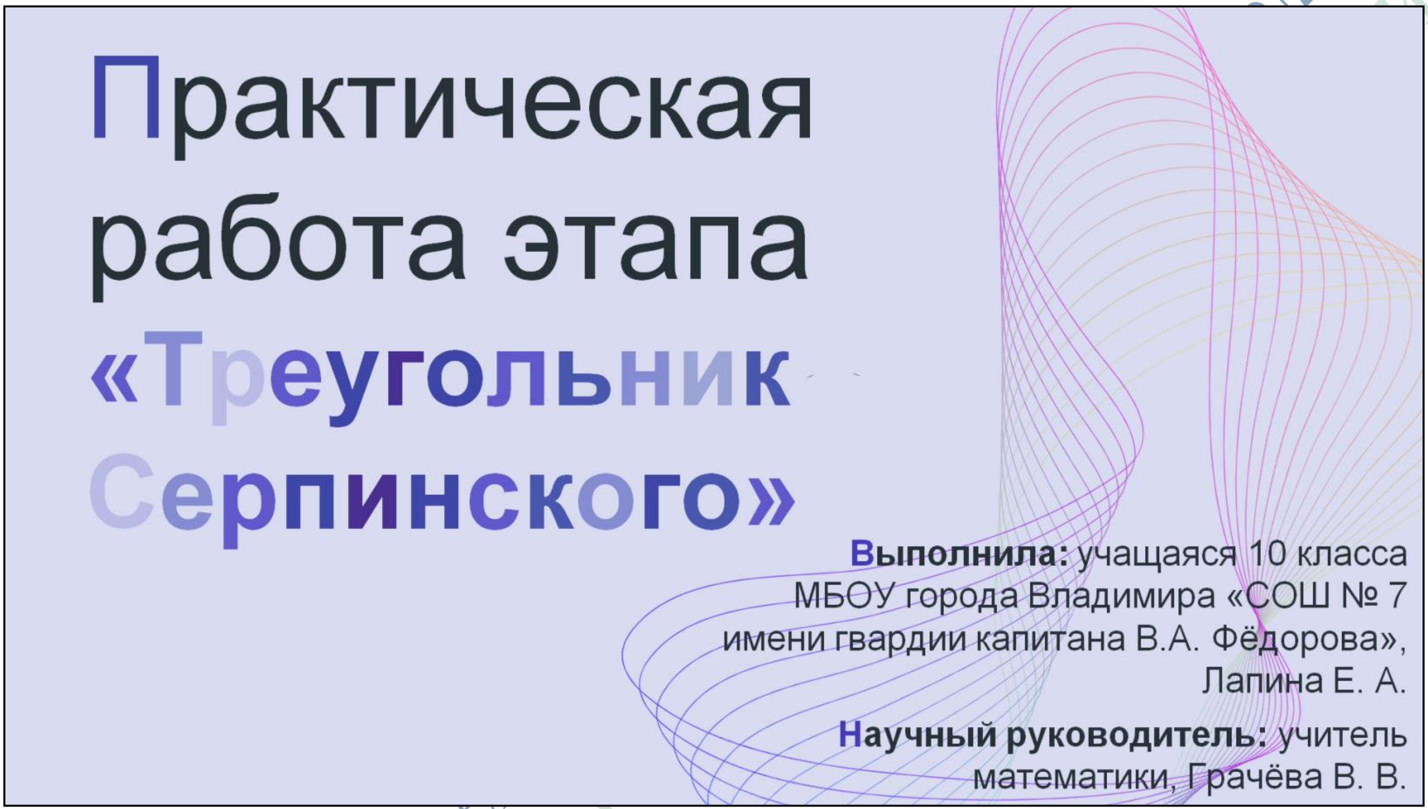
В процессе исследования была проделана следующая работа:

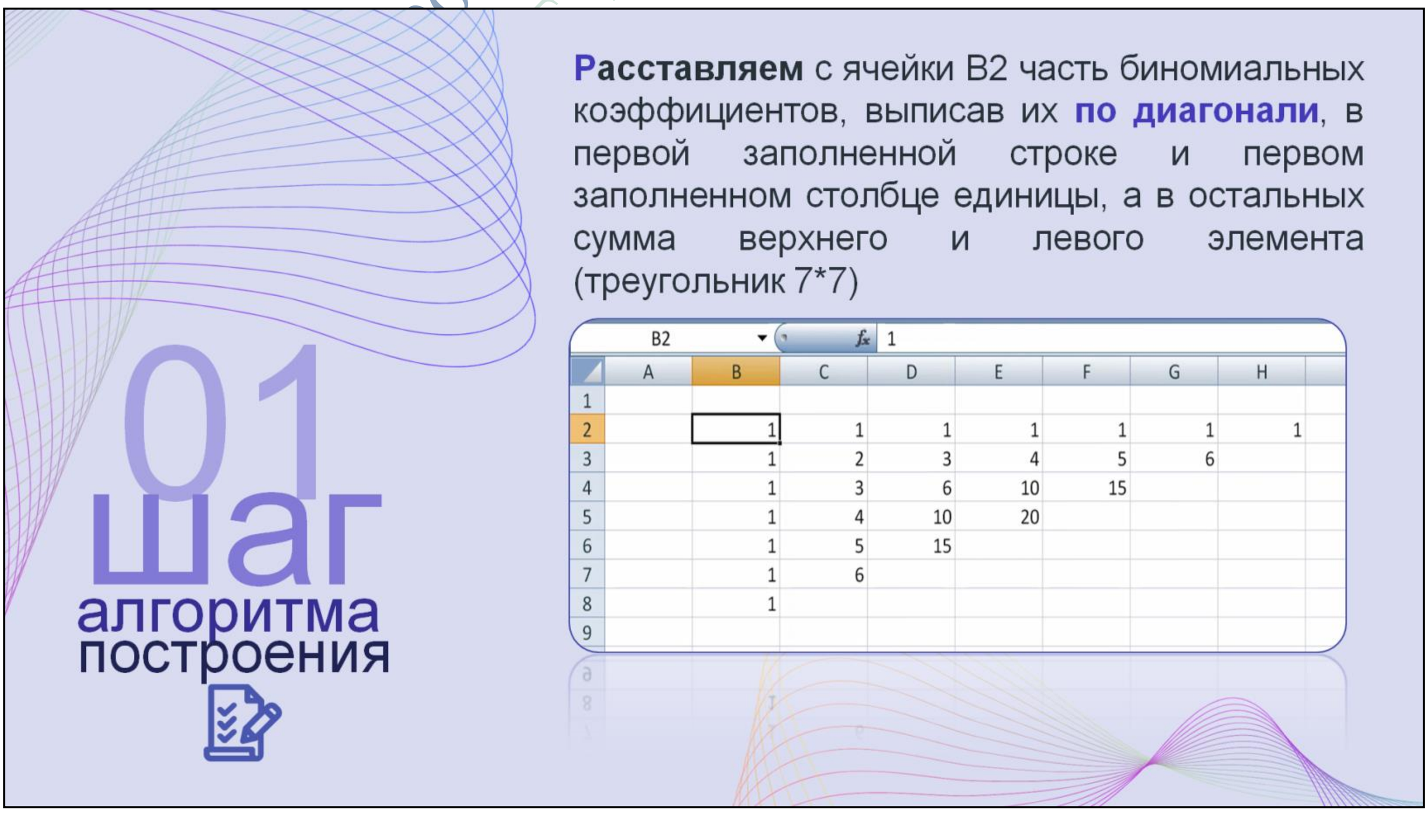
1. Для обоснования математического подхода, используемого при построении, проанализирована и проработана литература по теме исследования.
2. Рассмотрен и изучен арифметический треугольник Паскаля, треугольник Серпинского и его геометрическая интерпретация.
3. Разными способами в MS Excel построен фрактал на основе исследования делимости на 5 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля.
4. Исследованы закономерности построенного фрактала.
5. Дополнительно, для сравнения полученных фрактальных узоров, были исследованы делимости на 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 13 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля и построены соответствующие фракталы.

Используемые источники

1. Признаки делимости https://ru.wikipedia.org/wiki/Признаки_делимости#Признак_делимости_на_5
2. Вацлав Серпинский. 250 задач по элементарной теории чисел. Перевод с польского И. Г. Мельникова. М., Просвещение, 1968 — 168 с.
3. Pascal's Triangle Mod k https://demonstrations.wolfram.com/PascalsTriangleModK/
4. Все про работу с excel, word, access, powerpoint http://word-office.ru/kak-sdelat-treugol-nik-paskalya-v-excel.html
5. Информатизация. Сайт о работе с офисными программами https://iiorao.ru
6. Геометрические (конструктивные) фракталы http://elementy.ru/posters/fractals/geometric
7. Как сделать треугольник паскаля в excel? Комбинаторика в Excel https://gadgetz-zone.ru/excel/kak-sdelat-treugolnik-paskalya-v-excel.html
8. Кривая Коха https://ru.wikipedia.org/wiki/Кривая_Коха
9. Т-квадрат (фрактал) - T-square (fractal) https://wikichi.ru/wiki/T-square_(fractal)#T-square_fractal_and_Sierpiński_triangle
10. Н-фрактал https://elementy.ru/posters/fractals/H-fractal
11. Кривая Леви https://ru.wikipedia.org/wiki/Кривая_Леви
12. Видео https://yandex.ru/video/preview/?filmId=763899233817476166&text=в+эксель+фрактал+треугольника+паскаля
13. Народный музей. Геометрия живого. https://геометрия-живого.рф/?article_id=48875&1523369225

Приложение 1

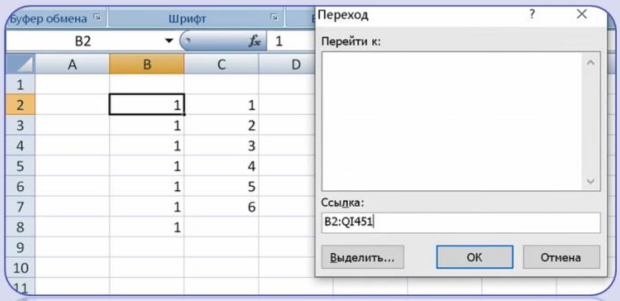


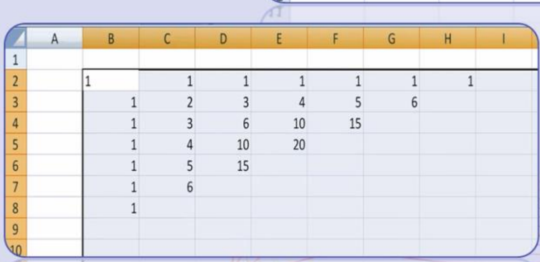


	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		1	1	1	1	1	1	1
3		1	2	3	4	5	6	
4		1	3	6	10	15		
5		1	4	10	20			
6		1	5	15				
7		1	6					
8		1						
9								

02 шаг алгоритма построения

Выделяем, начиная с первой заполненной ячейки (B2) необходимую область, в которой будет размещаться арифметический треугольник Паскаля (его первые **450 строк**), до QI451

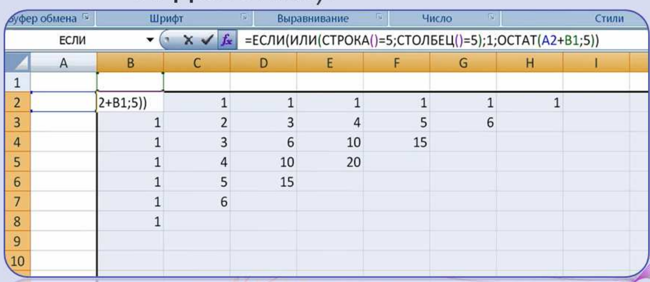


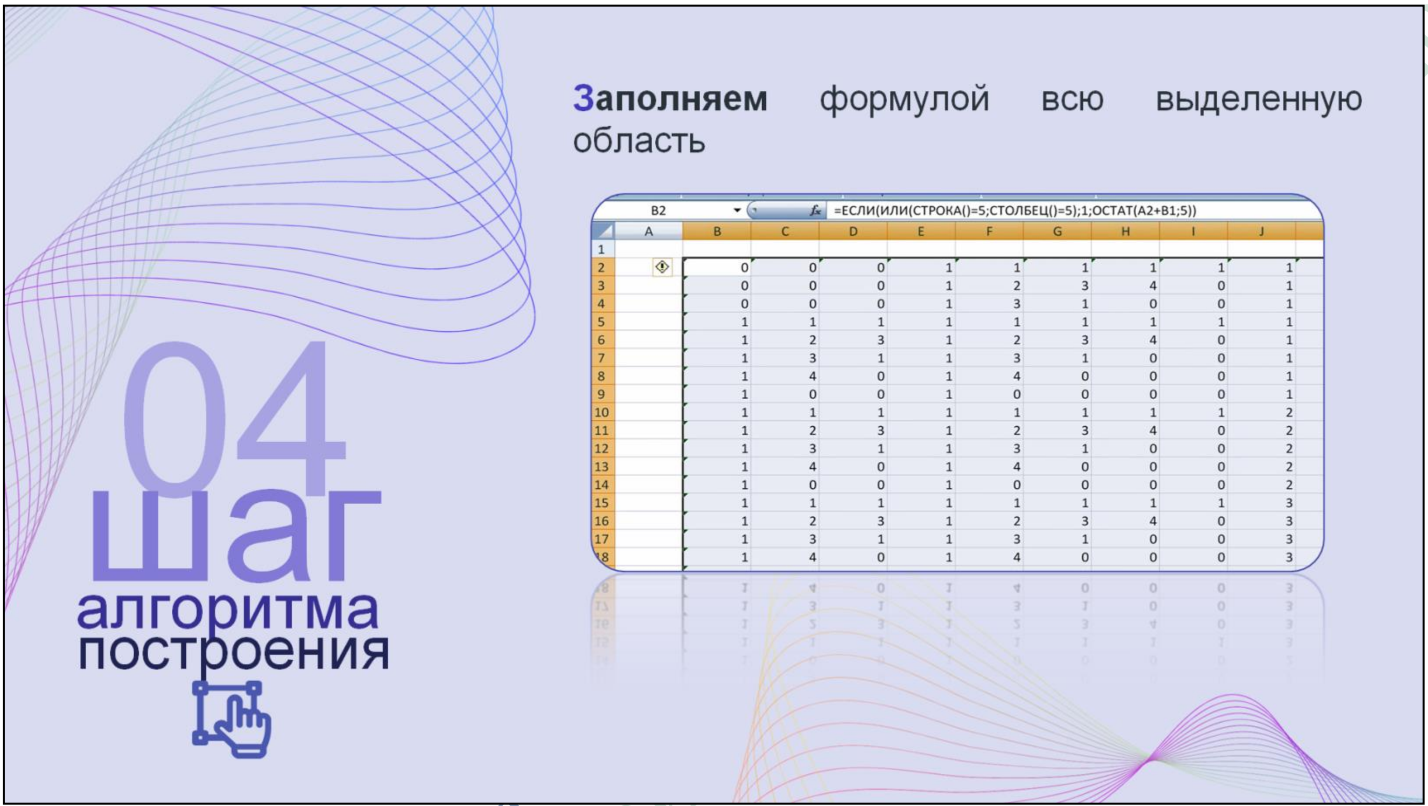


03 шаг алгоритма построения

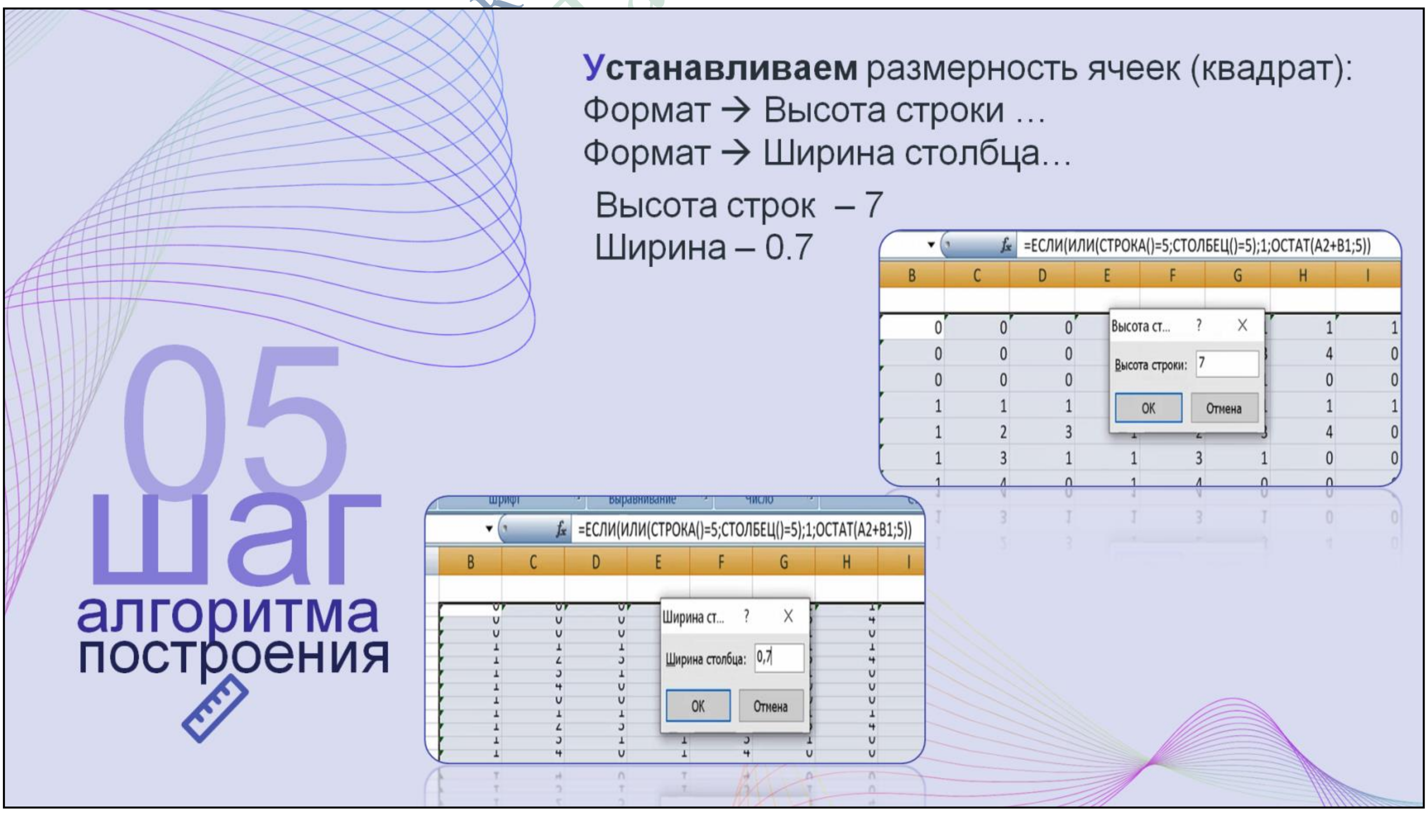
=ЕСЛИ(ИЛИ(СТРОКА()=5;СТОЛБЕЦ()=5);1;ОСТАТ(A2+B1;5))

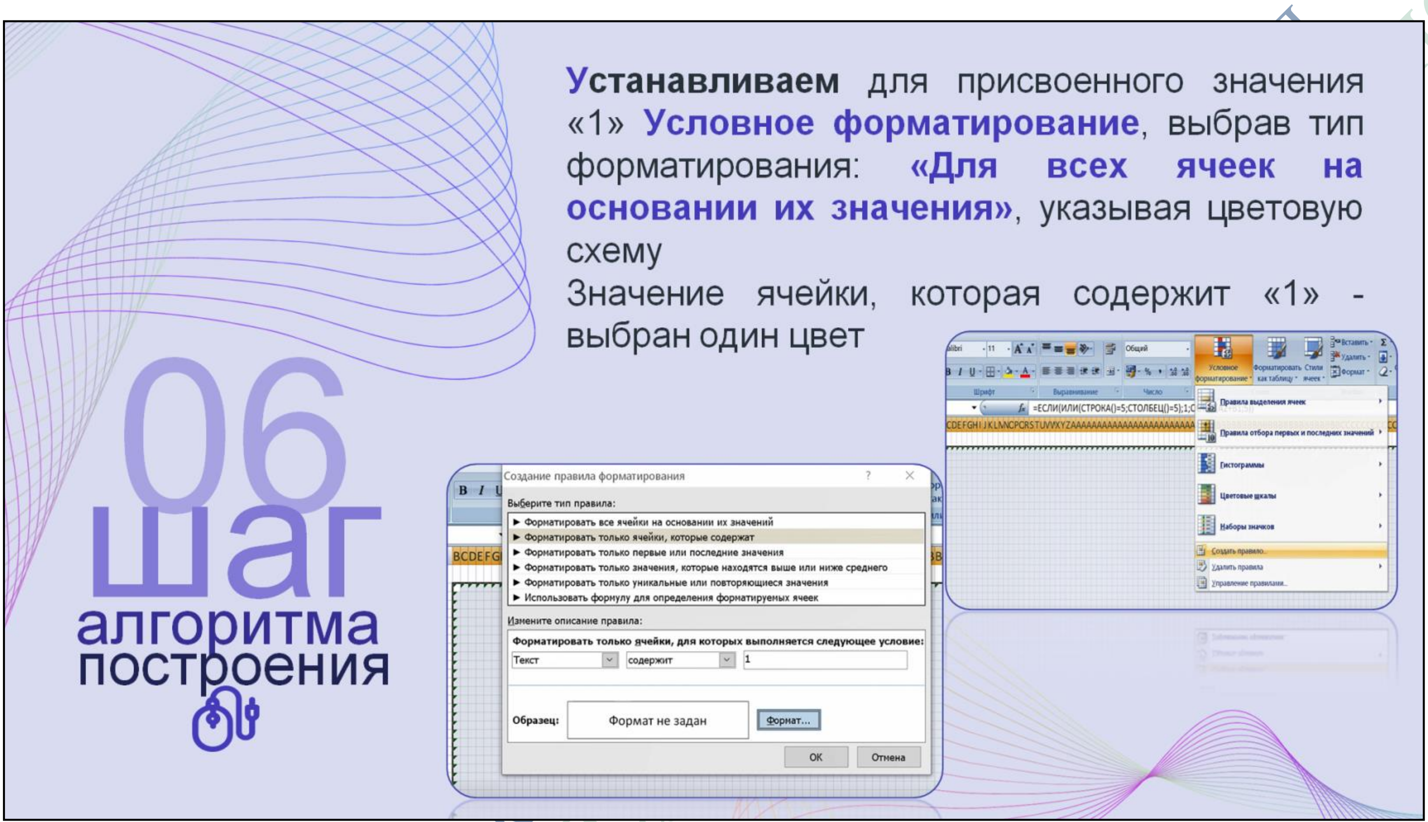
Прописываем, с учётом принципа делимости на 5, **функцию**, вычисляющую по всем строкам и столбцам (горизонтальный и вертикальный массивам) и возвращающую номера столбцов и строк, определяемых ссылкой выделенной области, (если выполнено условие, то присваивается значение –«1»), а также функцию, позволяющая вывести в указанную ячейку остаток от деления (возвращающую остаток от деления):

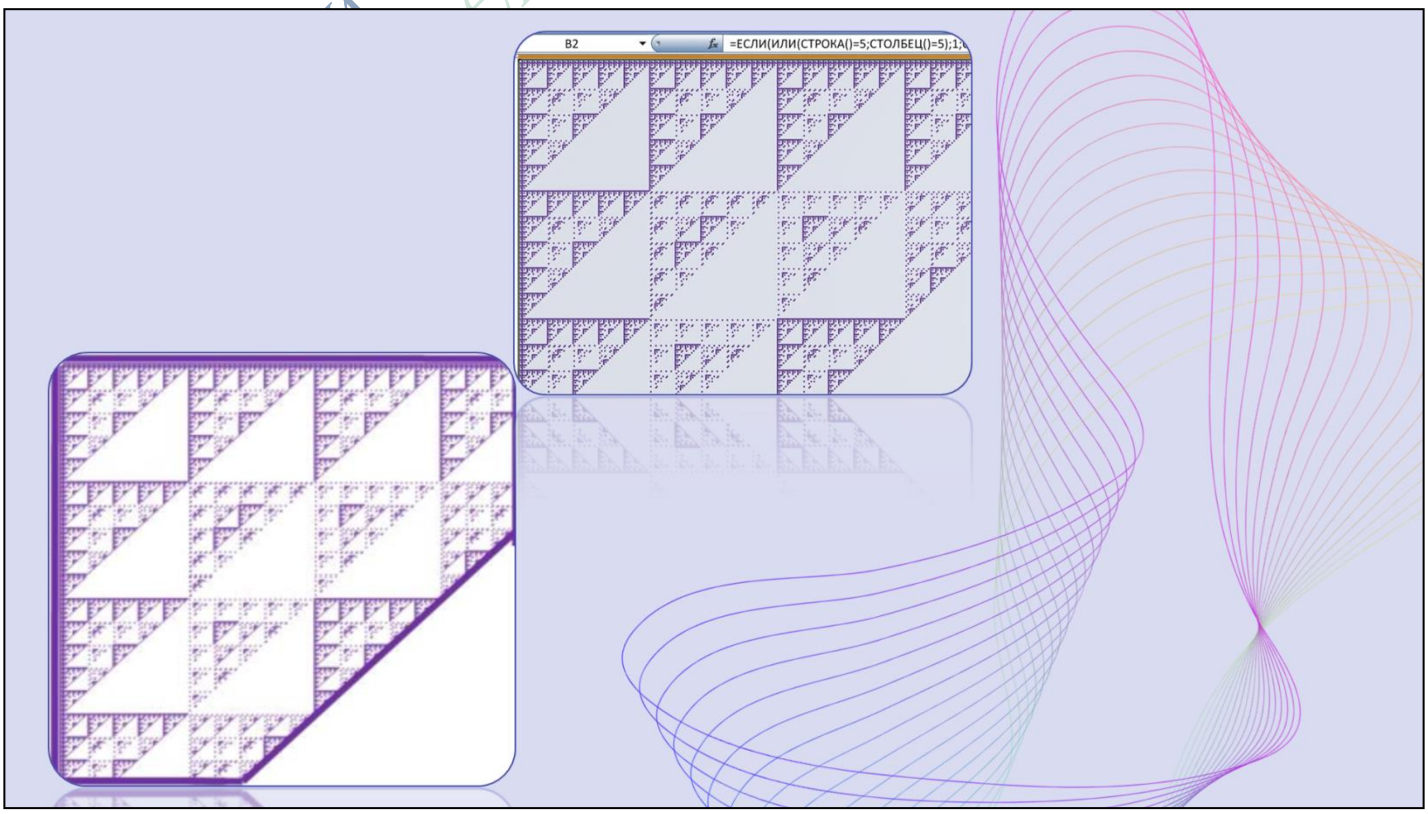




	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		0	0	0	1	1	1	1	1	1
3		0	0	0	1	2	3	4	0	1
4		0	0	0	1	3	1	0	0	1
5		1	1	1	1	1	1	1	1	1
6		1	2	3	1	2	3	4	0	1
7		1	3	1	1	3	1	0	0	1
8		1	4	0	1	4	0	0	0	1
9		1	0	0	1	0	0	0	0	1
10		1	1	1	1	1	1	1	1	2
11		1	2	3	1	2	3	4	0	2
12		1	3	1	1	3	1	0	0	2
13		1	4	0	1	4	0	0	0	2
14		1	0	0	1	0	0	0	0	2
15		1	1	1	1	1	1	1	1	3
16		1	2	3	1	2	3	4	0	3
17		1	3	1	1	3	1	0	0	3
18		1	4	0	1	4	0	0	0	3




Устанавливаем для присвоенного значения «1» **Условное форматирование**, выбрав тип форматирования: **«Для всех ячеек на основании их значения»**, указывая цветовую схему
Значение ячейки, которая содержит «1» - выбран один цвет
06
шаг
алгоритма
построения
Создание правила форматирования
Выберите тип правила:
Форматировать все ячейки на основании их значений
Форматировать только ячейки, которые содержат
Форматировать только первые или последние значения
Форматировать только значения, которые находятся выше или ниже среднего
Форматировать только уникальные или повторяющиеся значения
Использовать формулу для определения форматируемых ячеек
Измените описание правила:
Форматировать только ячейки, для которых выполняется следующее условие:
Текст
содержит
1
Образец:
Формат не задан
Формат...
ОК
Отмена



07

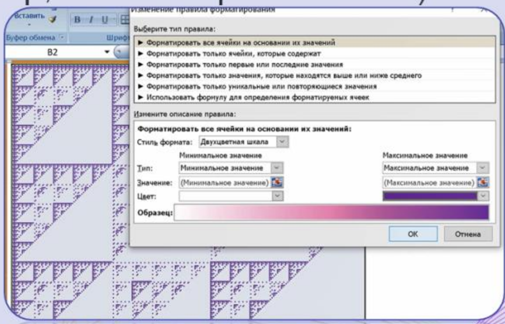
шаг

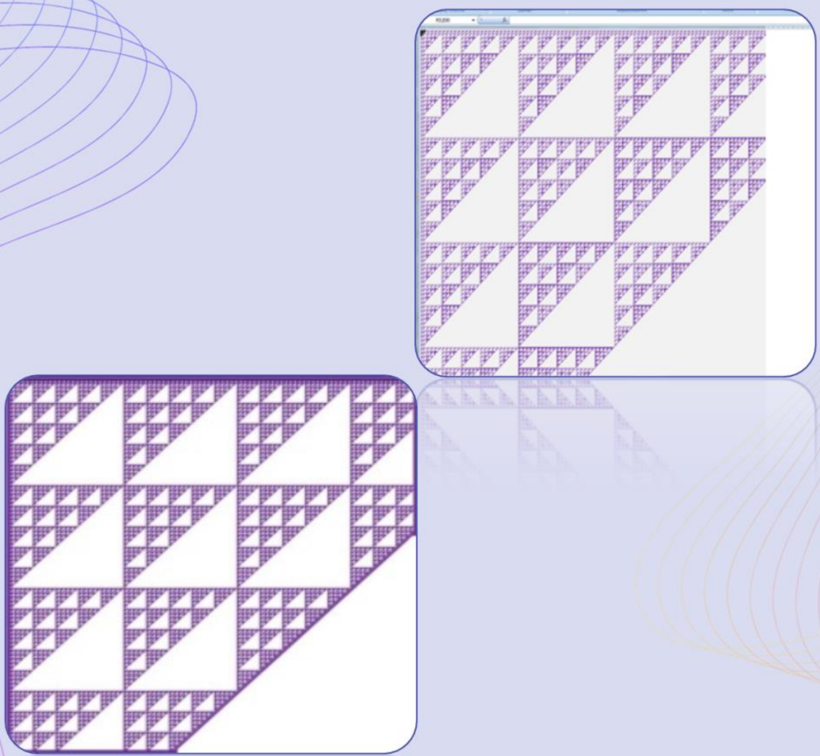
алгоритма построения

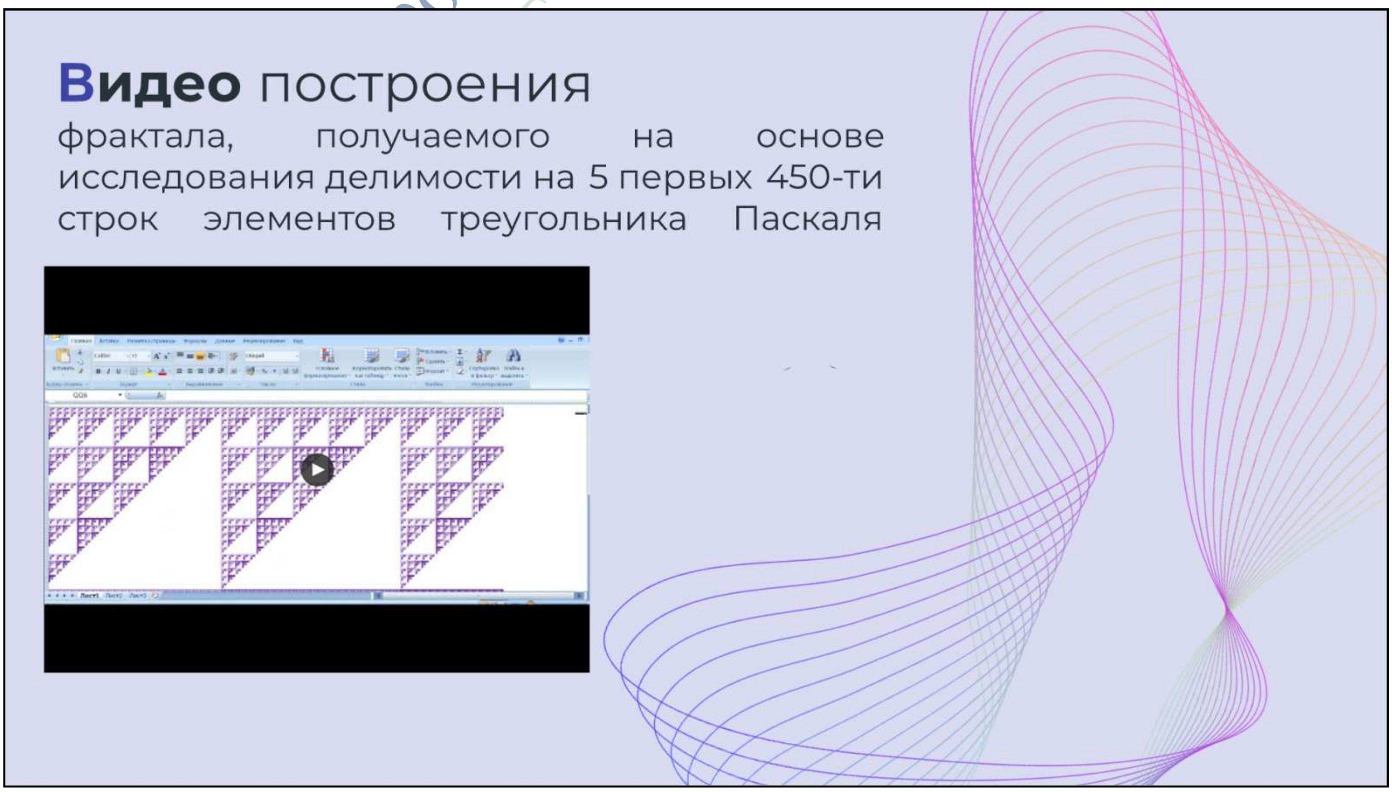
Создаем новое правило форматирования. Выбираем стиль формата - **«Двухцветная шкала»** (для чёткости орнамента).

Устанавливаем **Условное форматирование**, выбрав тип правила: **«Форматировать все ячейки на основании их значений».**

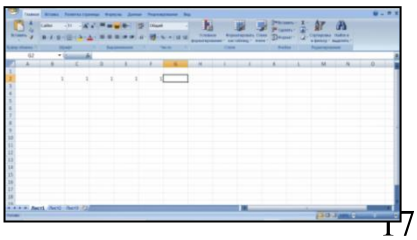
Стиль формата: **«Двухцветная шкала»** (для контрастного изображения) и выбираем **2 цвета** (например, белый и фиолетовый).



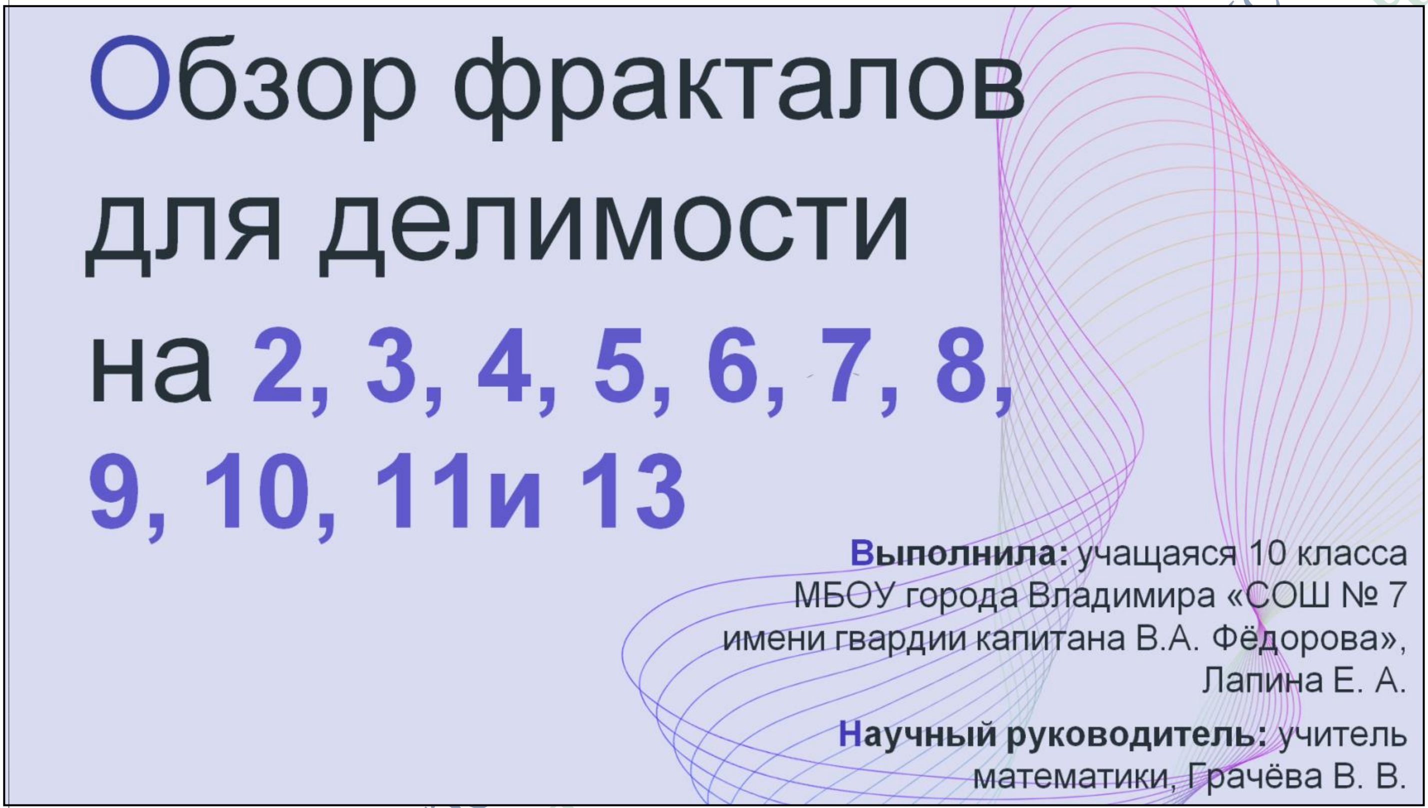




Видео по созданию
фрактала при исследовании делимости на 5
(под фрактальную музыку)



Приложение 2

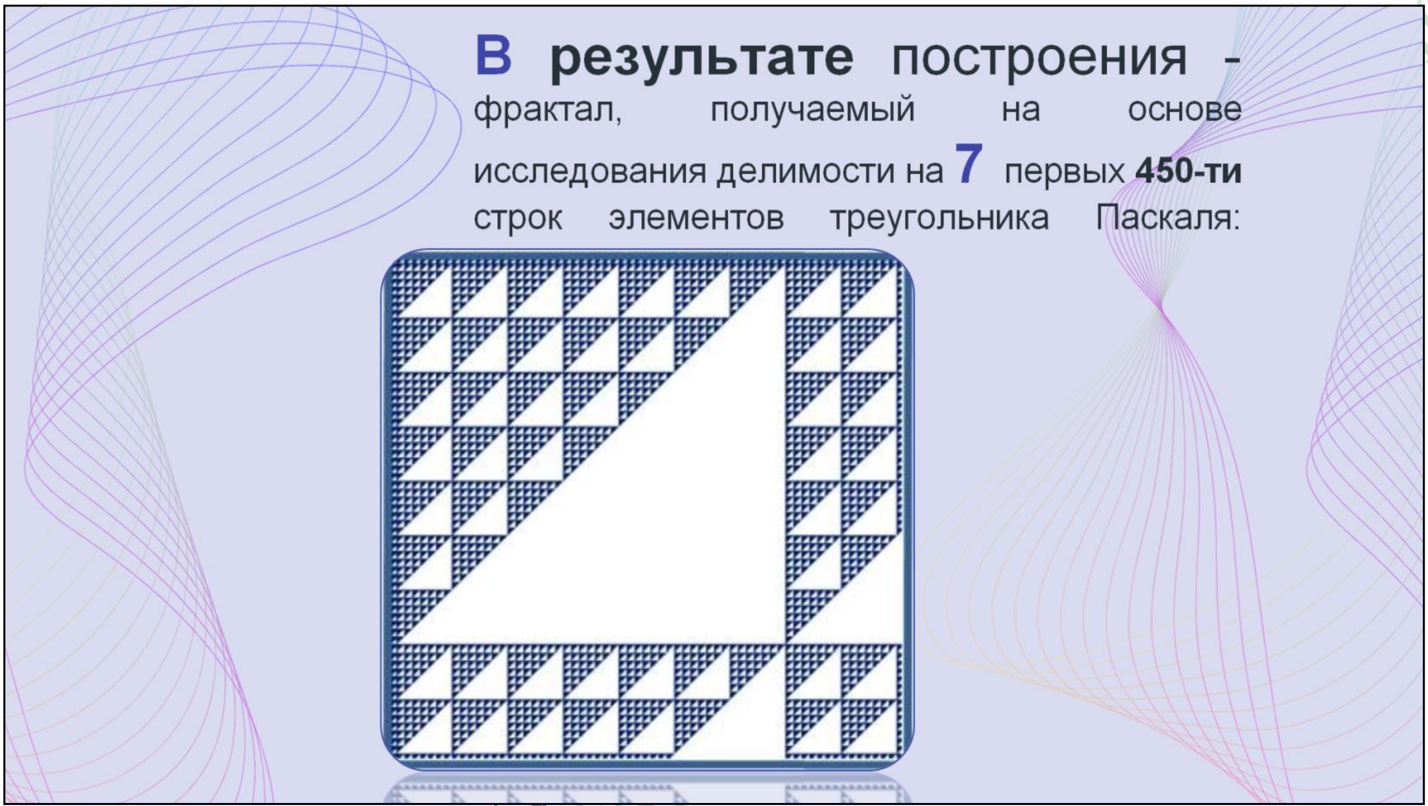



В результате построения - фрактал, получаемый на основе исследования делимости на 3 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля:


В результате построения - фрактал, получаемый на основе исследования делимости на 4 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля:


В результате построения - фрактал, получаемый на основе исследования делимости на 5 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля:

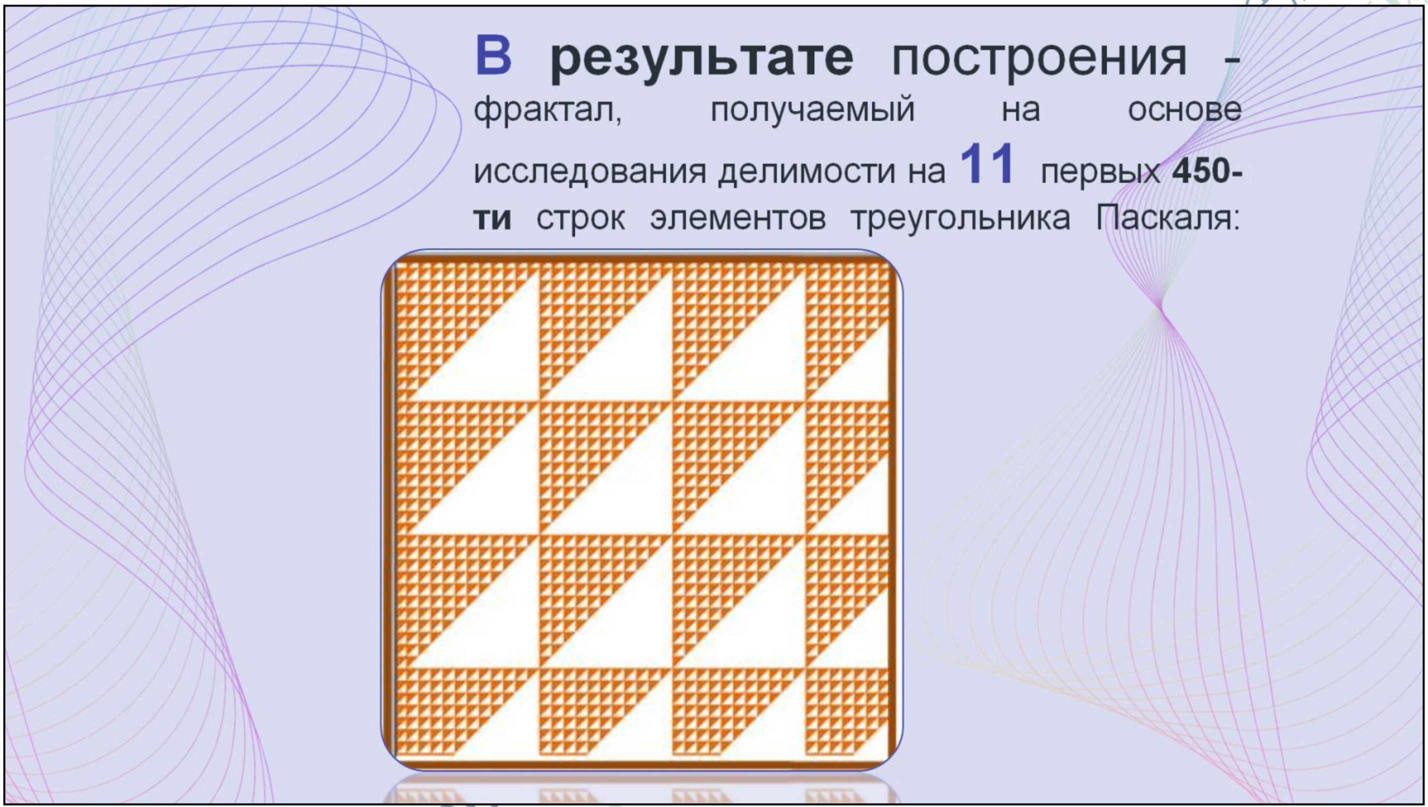

В результате построения - фрактал, получаемый на основе исследования делимости на 6 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля:


В результате построения - фрактал, получаемый на основе исследования делимости на 7 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля:


В результате построения - фрактал, получаемый на основе исследования делимости на 8 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля:


В результате построения - фрактал, получаемый на основе исследования делимости на 9 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля:


В результате построения - фрактал, получаемый на основе исследования делимости на 10 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля:


В результате построения - фрактал, получаемый на основе исследования делимости на 11 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля:


В результате построения - фрактал, получаемый на основе исследования делимости на 13 первых 450-ти строк элементов треугольника Паскаля: